تمرين رقم 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{5x+2}{x+3}$

و نضع $I=[2,3]$

1- بين أن $f(I)\subseteq I$

2- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية بحيث بما يلي: $\begin{cases} U_{n+1}=f(U_n) \\ U_0=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

أ- بين أن $2\le U_n\le 3$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ج- استنتج أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

تمرين رقم 2

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$

1- أدرس رتابة f على $I=[0,1]$ و بين أن $f(I)\subset I$

2- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في I

2- لتكن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية بحيث: $V_0=\dfrac{1}{2}$ و $V_{n+1}=f(V_n)$

أ- أحسب V_1 بين أن $0\le V_n\le 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب- بين أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية

ج- استنتج أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها

تمرين رقم 3

f دالة معرفة على $I=\left[0,\sqrt[3]{3}\right]$ ب: $f(x)=\dfrac{9x}{x^3+6}$

1- أدرس تغيرات الدالة f وبين أن $f(I)=I$

2- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية بحيث : $U_0=\dfrac{1}{2}$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $0<U_n<\sqrt[3]{3}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- بين أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية

ج- استنتج أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها

تمرين رقم 4

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_{n+1}=2+\dfrac{1}{U_n}-\dfrac{2}{U_n^2} \\ U_0=3 \end{cases}$$

1. بين أن $U_n\ge 2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2. أدرس رتابة $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و استنتج أن $2\le U_n\le 3$

3. بين أن $0<U_{n+1}-2\le\dfrac{1}{4}(U_n-2)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

4. بين أن $0<U_n-2\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ ثم حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

تمرين رقم 4

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بما يلي: $\begin{cases} U_{n+1}=U_n+\dfrac{1+U_n}{1+2U_n} \\ U_0=1 \end{cases}$

1- أ- بين أن $U_n>0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2- أ- بين أن $U_{n+1}\ge U_n+\dfrac{1}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب- أثبت أن $U_n\ge 1+\dfrac{n}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

تمرين رقم 5

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة ب : $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=\dfrac{U_n^2-2}{U_n+1} \end{cases}$

- بين أن $u_n\le -2$ لكل n من $\mathbb{N}$
- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- بين أن $u_{n+1}\le u_n-\dfrac{1}{2}$ لكل n من $\mathbb{N}$
- استنتج أن $u_n\le-\dfrac{1}{2}n-3$ لكل n من $\mathbb{N}$
- حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

تمرين رقم 6

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{5}(U_n-4n-1) \end{cases}$

و نضع $V_n=U_n+n-1$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{5}$

ب- أحسب V_n و U_n بدلالة n

ج- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2) نضع $T_n=V_0+V_1+......+V_n$

و $S_n=U_0+U_1+......+U_n$

بين أن $T_n=\dfrac{1}{4}\left(5-\dfrac{1}{5^n}\right)$ و أن $S_n=T_n-\dfrac{(n-2)(n+1)}{2}$